Proceedings of IAM, V.13, N.2, 2024, pp.185-193
DOI: 10.30546/2225-0530.2024.13.2.021

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.А. Аманов[1], С.Т. Гусейнов[2], А.А. Ягубов[1], Э.Г. Мамедгасанов[1]

[1]Национальная Авиационная Академия, Баку, Азербайджан, rabil.amanov@naa.edu.az; ayagubov@naa.edu.az; emammadhasanov@naa.edu.az
[2]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан, sarvanhuseynov@rambler.ru

Абстракт. Найден критический показатель $q*$, разделяющий области существования и отсутствия указанных решений.

Ключевые слова: Нелинейных уравнений и неравенств, глобальные решения

AMS Subject Classification: 35J62, 35J60, 35J66.

1. Введение

В предлагаемой статье излагается общий подход к априорным оценкам решений нелинейных стационарных уравнений и неравенств в частных производных, основанный на методе пробных функций. Этот подход охватывает достаточно широкий класс нелинейных задач, для которых мы исследуем проблему отсутствия нетривиальных решений. В последние годы проблеме отсутствия, или, другими словами, «необходимым условиям существования решения» уделяется большое внимание. За это время был достигнут значительный успех в этом направлении. При этом основное внимание уделяется изучению уравнений и неравенств во всем пространстве $\Re^n$ [1-5, 7, 8]. Наш подход основан на априорных оценках. Сначала мы получаем априорную оценку для решения рассматриваемой нелинейной проблемы. Затем получаем асимптотику этой априорной оценки. Доказательство отсутствия решения проводится методом от противного. Вывод априорной оценки основан на методе пробных функций. Оптимальный выбор пробной функции приводит к минимаксной нелинейной проблеме, которая порождает нелинейную емкость. Для анализа проблемы отсутствия достаточно получить точную оценку первого члена асимптотики этой емкости.

2. Обозначения

Условимся в следующих обозначениях и определениях. Евклидово пространство n - измерений обозначается символом E_n. Пусть G -

множество в пространстве E_n. Множество функций, непрерывных и ограниченных в G, будем обозначать через $C(G)$. Множество функций, имеющих в G всевозможные производные до порядка κ - включительно, причем эти производные непрерывны и ограничены в G, через $C^{(k)}(G)$. Через $C_0^{\kappa}(\Omega)$, где Ω - конечная область, будем обозначать множество функций, k - раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и обращающихся на $\partial\Omega$ в нуль в вместе со всеми своими производными до порядка $(k-1)$ – включительно. Пусть Ω - некоторая область, и k - целое число, $0 \le k \le \infty$. Через $M^{(k)}(\Omega)$ мы будем обозначать множество функций, которые κ - раз непрерывно дифференцируемы в Ω и обращаются в нуль в пограничной полоске (своей для каждой функции) области Ω. Если Ω - бесконечная область, то требуем дополнительно, чтобы функции из $M^{(\kappa)}(\Omega)$ обращались в нуль вне некоторого шара, также своего для каждой функции. Очевидно $M^{(\kappa)}(\Omega) \subset M^{(\kappa-1)}(\Omega)$. Функции класса $M^{(\kappa)}(\Omega)$ называются финитными в Ω. Пусть $a \in R_t \equiv \{a \in R / a \ge 0\}$.

Функция, определенная почти всюду в некоторой области Ω, называется локально суммируемой в Ω, если она суммируема на любом компакте, содержащемся в Ω. Множество таких функций принято обозначать через $L_{loc}(\Omega)$. Пусть $u(x)$ - непрерывная функция. Замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля, называется ее носителем и обозначается символом *suppU*. Очевидно, носитель производной от любой функции содержится в носителе данной функции.

Отнесем к множеству основных функций $D = D(E_n)$ все финитные бесконечно дифференцируемые в E_n функции. Совокупность основных функций, носители которых содержатся в области G, обозначим через $D(G)$. Обобщенный функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций D. Обозначим через $D' = D'(E_n)$ множество всех обобщенных функций. Значение функционала (обобщенный функции) f на основной функции $\varphi(x)$ будем записывать (f,φ). Будем говорить, что обобщенная функция f имеет порядок сингулярности, или просто порядок j, если ее можно представить в виде

$$f = \sum_{|\alpha| \le j} D^{\alpha} f_{\alpha}, \quad f_{\alpha} = L_{loc}(G).$$

В этом случае будем писать $S(f) \le j$. Очевидны следующие утверждения: а) $S(f_1 + f_2) = max(S(f_1), S(f_2))$, в) если $\varphi = C^{\infty}(\Omega)$, то

$S(\varphi f)=S(f)$, c) $S(D^{\alpha} f)=S(f)+|\alpha|$. Очевидно, что порядок любой локально суммируемой функции равен нулю. Пусть f пуст обобщенная функция порядка j, и φ - произвольная основная функция. Тогда

$$(f,\varphi)=\sum_{(\alpha)\le j}\left(D^{\alpha} f\alpha,\varphi\right)=\sum_{|\alpha|\le j}(-1)^{|\alpha|}(f_{\alpha},D^{\alpha}\varphi)= \sum_{|\alpha|\le j}(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} f_{\alpha}(x)D^{\alpha}\varphi dx, \forall\varphi\in M^{\infty}(\Omega) \tag{1}$$

Но правая часть формулы (1) сохраняет смысл для любой функции $\varphi\in M^{(j)}(\Omega)$. Пользуясь этой формулой, рассмотрим функционал f на классе $M^{(j)}(\Omega)$. Из сказанного следует, что обобщенная функция конечного порядка j можно трактовать как распределения над пространством основных функций $D_j(\Omega)=M^{(j)}(\Omega)$. Класс этих распределений уместно обозначить, через $D_j^{'}(\Omega)$. Класс этих распределений уместно обозначить, через $D_j^{'}(\Omega)$. Очевидно также, что если $f\in D_j^{'}(\Omega)$, то сужение функционала f на множество $D=M^{(\infty)}(\Omega)$ есть обобщенная функция класса D'. С понятием обобщенных решений дифференциального уравнения тесно связано понятие обобщенных производных (см. [6], с.33).

В некоторой области $\Omega\subset E_n$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu=\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_{\alpha}(x)D^{\alpha}u=f(x) \tag{2}$$

Может случится, что $\Omega\subset E_n$. Будем считать, что коэффициенты $A_{\alpha}\in C^{(j+|\alpha|)}(\Omega)$, где j - целое число, $0\le j\le\infty$. Будем искать, решения уравнения (2), принадлежащие классу $D_j^{'}(\Omega)$. Если $u(x)$ такое решение, то $S(u)\le j$ и $S(A_{\alpha}(x)D^{\alpha}u)\le j+|\alpha|$. Левая часть уравнения (2) есть обобщенная функция класса $D_{j+m}^{'}(\Omega)$. Будем считать поэтому, что свободный член уравнения $f\in D_{j+m}^{'}(\Omega)$. Если решение и $u(x)\in D_j^{'}(\Omega)$ существует, то можно $u(x)$ рассматривать как обобщенная решение данного уравнения (2). Это решение определяется тождеством

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_{\alpha}(x)D^{\alpha}u,\varphi\right)=(f,\varphi),\ \forall\varphi\in D_{j+m}(\Omega). \tag{3}$$

Формула дифференцируемая обобщенная функция и правило умножения обобщенная функция соответствующего класса $C^{(l)}(\Omega),\ l \le \infty$, позволяет заменить соотношение (3) эквивалентным соотношением

$$\left(u, \sum_{|\alpha|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(A_{\alpha}(x)\varphi)\right) = (f,\varphi),\ \forall\varphi \in D_{j+m}(\Omega).$$

Таким образом, локально суммируемое обобщенное решение уравнения (2) можно трактовать как регулярно обобщенная функция, которое является обобщенным решением того же уравнения. Это значительно упрощает анализ и позволяет рассматривать существенно новые классы нелинейных задач без привлечения какой-либо информации о фундаментальном решении соответствующего дифференциального оператора. В частности, этот подход позволил рассмотреть многомерные нелинейные эллиптические задачи высокого порядка.

3. Описание метода

Рассмотрим уравнения и неравенства вида

$$(-\Delta)^{l}\left(|x|^{\sigma} u\right) \ge |x|^{\gamma} \cdot |u|^{q},\quad x \in R^{n}. \tag{4}$$

Здесь операторы $(-\Delta)^{l}$ имеет вид

$$(-\Delta)^{l} = \sum_{|\alpha|=2l} C_{\alpha} D^{\alpha},$$

с $q>1, \sigma<2l, \gamma>-2l, l\ge 1$ и пусть

$$|x|^{(\sigma q-\gamma)/(q-1)} \in L^{1}_{loc}(R^{n} \setminus B_{R}), \tag{5}$$

где $B_{R} = \{x / |x| < R\}$ с $R \ge 1$.

Определение. Под слабым решение задачи (4) понимается функция $u(x) \in L^{q}_{loc}(R^{n})$, удовлетворяющая неравенству

$$\int_{R^{n}} \sum_{|\alpha|=2l} |x|^{\sigma} u \cdot C_{\alpha} D^{\alpha}\varphi dx \ge \int_{R^{n}} |x|^{\gamma} |u|^{q} \varphi dx$$

при любой функции $\varphi(x) \ge 0$ из класса $C_{0}^{2l}(R^{n})$.

В силу определения решения имеем

$$\int_{R^{n}} |x|^{\gamma} |u|^{q} \le \int_{R^{n}} |x|^{\sigma} u L\varphi dx \le \int_{R^{n}} |x|^{\sigma} |u| |L\varphi| dx = \int_{R^{n}} |x|^{\frac{\gamma}{q}} |x|^{\frac{\gamma}{q}} \cdot |x|^{\sigma} \cdot |u| \cdot \varphi^{\frac{1}{q}} \cdot \varphi^{\frac{1}{q}} \cdot |L\varphi| dx \le$$

$$\left(\int_{R^{n}} |x|^{\gamma} |u|^{q} \varphi dx\right)^{\frac{1}{q}} x \left(\int_{R^{n}} \frac{\left[|x|^{\sigma} \cdot |L\varphi|^{q'} dx\right]}{\left[|x|^{\gamma} \cdot \varphi\right]^{q'-1}}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

где $q' = \dfrac{q}{q-1}$, $|L\varphi| = \sum\limits_{|\alpha|=2l} |C_\alpha| \cdot |D^\alpha \varphi|$. Отсюда в силу неравенства Юнга с параметром $\varepsilon > 0$

$$a \cdot b \le \frac{\varepsilon}{q} a^q + \frac{1}{q' \varepsilon^{q'-1}} b^{q'}, \quad a, b > 0,$$

находим

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \le \frac{\varepsilon}{q} \int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx + \frac{1}{q' \cdot \varepsilon^{q'-1}} \cdot \int_{R^n} \frac{[|x|^\sigma \cdot |L\varphi|^{q'}] dx}{[|x|^\gamma \cdot \varphi]^{q'-1}}.$$

Таким образом, получаем априорную оценку

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \le \int_{R^n} \frac{[|x|^\sigma \cdot |L\varphi|^{q'}] dx}{[|x|^\gamma \cdot \varphi]^{q'-1}}. \tag{6}$$

Выберем теперь пробную функцию $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \varphi_0 \left(\frac{|x|^2}{R^2} \right), \tag{7}$$

где $\varphi_0 \ge 0$ из класса $C_0^{2l}(R)$ такая, что

$$\varphi_0(S) = \begin{cases} 1, 0 \le S \le 1, \\ 0, S \ge 2. \end{cases}$$

Сделаем теперь замену переменных

$$x = \xi, \ \ x = R\xi. \tag{8}$$

Тогда получаем $\varphi(x) = \varphi_0\left(|\xi|^2\right)$ и

$$\int_{R^n} \frac{[|x|^\sigma \cdot |L\varphi|^{q'}] dx}{[|x|^\gamma \cdot \varphi]^{q'-1}} = R^\theta \cdot \int_{1 \le |\xi| \le \sqrt{2}} \frac{[|\xi|^\sigma \cdot |L^* \varphi_0|]^{q'}}{[|\xi|^\alpha \cdot \varphi_0]^{q'-1}} d\xi. \tag{9}$$

где $|L^* \varphi_0| = \sum\limits_{|\alpha|=2l} |C_\alpha| \cdot |D^\alpha \varphi_0|$ и

$$\theta = n + \sigma q' - \gamma(q'-1) - 2lq' \tag{10}$$

Выберем теперь пробную функцию φ_0 из указанного класса так, чтобы

$$\frac{|D^\alpha \varphi_0(\xi)|^{q'}}{[\varphi_0(\xi)]^{q'-1}} \le C_0 < \infty$$

при $1 \le |\xi| \le \sqrt{2}$ и

$$\frac{|\xi|^{\sigma q \backslash (q-1)}}{|\xi|^{\gamma/(q-1)}} \in L^1\left(1 \le |\xi| \le \sqrt{2}\right). \tag{11}$$

Тогда из формулы (6) следует, что справедлива априорная оценка

$$\int_{R^n} |x|^{\gamma} |u|^q \varphi dx \le \subset R^{\theta} . \tag{12}$$

с некоторой константой $C = C_{\theta} > 0$.

Отсюда получаем после перехода к пределу при $R \to \infty$, что если $\theta < 0$, то

$$\int_{R^n} |x|^{\gamma} |u|^q dx = 0 .$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано при $\theta < 0$, т.е. при

$$1 < q < \frac{n+\gamma}{n+\sigma-2l} . \tag{13}$$

Рассмотрим теперь случай $\theta = 0$, т.е.

$$q = \frac{n+\gamma}{n+\sigma-2l}$$

В этом случае соотношение (9) влечет

$$\int_{R^n} \frac{[|x|^{\sigma} \cdot |L\varphi|^{q'}]dx}{[|x|^{\gamma} \cdot \varphi]^{q'-1}} = C_1, \tag{14}$$

где

$$C_1 = \int_{1 \le |\xi| \le \sqrt{2}} \frac{[|\xi|^{\sigma} \cdot |L^* \varphi_0|]^{q'}}{[|\xi|^{\gamma} \cdot \varphi_0]^{q'-1}} d\xi .$$

Следовательно в силу (6) имеем априорную оценку

$$\int_{R^n} |x|^{\gamma} |u|^q \varphi dx \le C_1 ,$$

при любом $R \to \infty$, так что

$$\int_{R^n} |x|^{\gamma} |u|^q dx \le C_1 . \tag{15}$$

Заметим, что

$$supp\{L\varphi\} \subseteq \left\{x \in R^n / R \le |x| \le \sqrt{2}R\right\}.$$

Тогда в силу неравенства Гельдера имеем

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \le \int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |x|^\sigma |u| \cdot |L\varphi| dx = \int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |x|^{\frac{\gamma}{q}} |x|^{-\frac{\gamma}{q}} \cdot |x|^\sigma \cdot |u| \cdot \varphi^{\frac{1}{q}} \cdot \varphi^{-\frac{1}{q}} \cdot |L\varphi| dx \le$$

$$\left(\int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} \text{x} \left(\int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} \frac{[|x|^\sigma |L\varphi|^{q'}]dx}{[|x|^\gamma \varphi]^{q'-1}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Отсюда в силу (14) следует, что

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \le C_1^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |x|^\gamma |u|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C_1^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |x|^\sigma |u|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{16}$$

Но в силу (15) и абсолютной сходимости интеграла $\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q dx$ имеем

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q dx \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Тогда переходя к пределу при $R \to \infty$ (16), получаем

$$\int_{R^n} |x|^\gamma |u|^q dx = 0.$$

Таким образом, и в этом случае $u = 0$, т.е. окончательно с учетом (13) условие отсутствия решения принимает вид

$$1 < q \le \frac{n+\gamma}{n+\sigma-2l} \tag{17}$$

Запишем полученное утверждение в виде теоремы.

Теорема. Пусть показатель q удовлетворяет неравенству (17). Тогда не существует глобального нетривиального слабого решения задачи (4).

Литература

1. Аманов Р.А., Гусейнов С.Т. Квазилинейные уравнения и неравенства второго порядка с неограниченными коэффициентами, Procedings of IAM, V.13, N.1, (2024), pp.119-125.
2. Багыров Ш.Г. Существование и асимптотика решений нелинейных уравнений эллиптического и параболического типа в различных областях, Докторск. диссер., (2024), Баку.

3. Лаптев Г.Г. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах, Известия РАН, сер. математ., V.64, N.6, (2000), cc.107-124.
4. Мамедов Ф.И., Аманов Р.А. О локальных и глобальных свойствах решений полулинейных уравнений и главной частью типа вырождающегося p-Лапласиана, Дифференциальные уравнения, V.43, N.12, (2007), cc.1-9.
5. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных, Тр.МИАН, т.234, (2001), cc.3-383.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных, М., (1977).
7. Amanov R.A., Ismailov A.I. On equation of the form $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,u,Du)$, Azerbaijan journal of mathematics, V.13, N.2, (2023), pp.137-158.
8. Bilalov B.T., Sadigova S.R. On solvability in the small of higher order elliptic equations in Rearrangement invariant Spaces, Siberian mathematical j., V.63, pp.425-437.

HIGH-ORDER SEMILINEAR STATIONARY EQUATIONS AND INEQUALITIES WITH UNBOUNDED COEFFICIENTS

R.A. Amanov[1], S.T. Huseynov[2], A.A. Yagubov[1], E.G. Mamedhasanov[1]

[1]National Aviation Academy, Baku, Azerbaijan, rabil.amanov@naa.edu.az;
ayagubov@naa.edu.az, emammadhasanov@naa.edu.az
[2]Baku State University, Baku, Azerbaijan,
sarvanhuseynov@rambler.ru

Abstract

The critical exponent q^*, which separates the regions of existence and non-existence of solutions, is found.

Keywords: Nonlinear equations and inequalities, global solutions.

References

1. Amanov R.A., Gusejnov S.T. Kvazilinejnye uravnenija i neravenstva vtorogo porjadka s neogranichennymi kojefficientami, Procedings of IAM, V.13, N.1, (2024), pp.119-125 (Amanov R.A., Guseinov S.T. Quasilinear equations and

inequalities of the second order with unbounded coefficients, Procedings of IAM, V.13, N.1, (2024), pp.119-125.)

2. Bagyrov Sh.G. Sushhestvovanie i asimptotika reshenij nelinejnyh uravnenij jellipticheskogo i parabolicheskogo tipa v razlichnyh oblastjah, Doktorsk. disser., (2024), Baku. (Bagyrov Sh.G. Existence and asymptotics of solutions of nonlinear equations of elliptic and parabolic type in various areas, Doctoral dissertation, (2024), Baku).
3. Laptev G.G. Otsutstvie global'nyh polozhitel'nyh reshenij sistem polulinejnyh jellipticheskih neravenstv v konusah, Izvestija RAN, ser. matemat., V.64, N.6, (2000), ss.107-124 (Laptev G.G. Absence of global positive solutions of systems of semilinear elliptic inequalities in cones, Bulletin of the Russian Academy of Sciences, ser. mat., V.64, N.6, (2000), pp.107-124).
4. Mamedov F.I., Amanov R.A. O lokal'nyh i global'nyh svojstvah reshenij polulinejnyh uravnenij i glavnoj chast'ju tipa vyrozhdajushhegosja r-Laplasiana, Differencial'nye uravnenija, V.43, N.12, (2007), ss.1-9 (Mamedov F.I., Amanov R.A. On local and global properties of solutions of semilinear equations and the principal part of the degenerate p-Laplacian type, Differential Equations, V.43, N.12, (2007), pp.1-9).
5. Mitidieri Je., Pohozhaev S.I. Apriornye ocenki i otsutstvie reshenij nelinejnyh uravnenij i neravenstv v chastnyh proizvodnyh, Tr.MIAN, t.234, (2001), ss.3-383 (Mitidieri E., Pokhozhaev S.I. A priori estimates and the absence of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities, Trudy Steklova Steklova, v.234, (2001), pp.3-383).
6. Mihlin S.G. Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh, M., (1977).(Mikhlin S.G. Linear partial differential equations, M., (1977)).
7. Amanov R.A., Ismailov A.I. On equation of the form $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,u,Du)$, Azerbaijan journal of mathematics, V.13, N.2, (2023), pp.137-158.
8. Bilalov B.T., Sadigova S.R. On solvability in the small of higher order elliptic equations in Rearrangement invariant Spaces, Siberian mathematical j., V.63, pp.425-437.